121 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
ΤΜΗΜΑ Ι
Φροντιστηριακές Ασκήσεις #6
18-11-18

1) Στον R-διανυσματικό χώρο R^4 θεωρούμε τους υποχώρους

$$V = \{(s+t, 2s+t+u, s+t, -t-u) | s, t, u \in R\}$$

και

$$W = \{(x, y, z, w) | x + y - z - w = 0\}.$$

Να προσδιοριστούν βάσεις και οι διαστάσεις των υποχώρων V, W, $V \cap W$ και $V + W$. Βρείτε ένα χώρο V' τέτοιο ώστε $R^4 = V \oplus V'$ και ένα χώρο W' τέτοιο ώστε $R^4 = W \oplus W'$.

2) Εξετάστε αν οι επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές.
α) $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x^2, 1)$.
β) $T : R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (x + y + z, ax + b)$.
γ) $T : R \to R$, $T(x) = ax$. Υπάρχουν άλλες;
δ) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $T : R^3 \to R^4$ με

$$T(x, y, z) = A(x, y, z)^t$$

ε) $T : R^2 \to R$, $T(x, y) = ax + by$. Υπάρχουν άλλες;

3) Εξετάστε αν οι απεικονίσεις $T : R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x + y, y)$ και $g : R^2 \to R^2$, $g(x, y) = (x - y, ay)$ είναι ισομορφισμοί και αν είναι να βρεθούν οι αντίστροφοι.
Επίσης να βρεθούν τα στοιχεία $g(T(2, 1))$, $T^3(1, -2)$.

4) Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $T : R^2 \to R$, ώστε $T(1, 1) = 3$ και $T(1, 0) = 4$. Να βρεθεί ο πυρήνας της και όλα τα στοιχεία (x, y) ώστε $T(x, y) = 5$.

5) Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $T : R^3 \to R^3$, ώστε ο πυρήνας της να είναι ο υπόχωρος $Y = \{(x, y, z) \| x - y + z = 0\}$ και $T(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$.

6) Έστω V διανυσματικός χώρος και δύο γραμμικές απεικονίσεις $f, g : V \to R$. Ορίζουμε την

$$T : V \to R^2$$

από

$$T(u) = (f(u), g(u))$$

Να δείξετε ότι η T είναι γραμμική και $ker(T) = ker(f) \cap ker(g)$.

7) Έστω $T : V \to W$ γραμμική απεικόνιση με $dimV = k$ και $dimW = m$. Αν ο Y είναι υπόχωρος του V με βάση $\{v_1, ..., v_s\}$, τότε $T(Y) =< T(v_1), ..., T(v_s) >$. Πότε το σύνολο $\{T(v_1), ..., T(v_s)\}$ αποτελεί βάση του $T(Y)$.